

FISHER AXBOROTI ASOSIDA VARIATION KVANT ALGORITMLAR
INFORMATIV PARAMETRLARINI ANIQLASH¹Mamatov N.S., ^{1*}Muhamediyeva D.T., ¹Shukrulloev B.R.

*dilnoz134@rambler.ru

¹«Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti» milliy tadqiqot universiteti, Toshkent, O'zbekiston<https://doi.org/10.5281/zenodo.22967316>

Annotatsiya. Ushbu maqolada variatsion kvant algoritmlarida optimal parametrlar sonini aniqlash masalasi tadqiq etiladi. Variatsion kvant algoritmlarining hisoblash samaradorligi parametrik kvant ansatzning ifodaviyligi va undagi parametrlar soniga bevosita bog'liq. Parametrlar sonining ortishi kvant holatlar fazosini kengroq ifodalash imkonini bersa-da, optimallashtirish fazosining o'lchami, kvant sxemasi chuqurligi va hisoblash xarajatlarining oshishiga olib keladi. Shu sababli masalani yetarli aniqlikda yechish imkonini beradigan minimal parametrlar sonini aniqlash muhim hisoblanadi. Mazkur tadqiqotda ushbu masalani hal qilish uchun Kvant Fisher axborotiga asoslangan parametr tanlash usuli taklif etiladi. Parametrik kvant holat uchun QFI matritsasi shakllantirilib, uning xos qiymatlari asosida umumiy kvant axborotining parametrik yo'nalishlar bo'yicha taqsimlanishi aniqlanadi. QFI axborotining kumulyativ ulushi va yangi parametr kiritilganda hosil bo'ladigan marginal axborot o'sishi asosida optimal parametrlar sonini aniqlash mezon shakllantiriladi. Taklif etilgan yondashuv variatsion kvant algoritmlarida parametrlar sonini faqat empirik ravishda emas, balki kvant axborot-geometrik xususiyatlari asosida aniqlash imkonini beradi.

Kalit so'zlar: kvant Fisher axboroti, variatsion kvant algoritmi, VQA, VQE, QFI, parametrik kvant sxemasi, variatsion ansatz, kvant axborot geometriyasi, optimal parametrlar, kvant optimallashtirish.

Kirish

So'nggi yillarda kvant hisoblash texnologiyalarining jadal rivojlanishi murakkab optimallashtirish, kvant kimyosi, mashinali o'rganish va katta o'lchamli hisoblash masalalarini yangi yondashuvlar asosida yechish imkoniyatlarini kengaytirmoqda. Ayniqsa, shovqinli oraliq miqyosli kvant qurilmalari (NISQ) sharoitida ishlashga mo'ljallangan variatsion kvant algoritmlari kvant va klassik hisoblash resurslarini birlashtirishi bilan alohida ahamiyat kasb etmoqda. Variatsion kvant xos qiymat yechuvchisi (VQE) ana shunday algoritmlardan biri bo'lib, kvant tizimning asosiy energetik holatini aniqlashda keng qo'llaniladi. VQE algoritmidagi kvant holati parametrik kvant ansatz yordamida shakllantiriladi, parametrlarni optimallashtirish esa klassik optimallashtirish algoritmi orqali amalga oshiriladi. Variatsion kvant algoritmlarining hisoblash samaradorligi ko'p jihatdan tanlangan ansatzning tuzilishi va undagi variatsion parametrlar soniga bog'liq. Parametrlar sonining ortishi ansatzning ifodalash imkoniyatlarini kengaytirsa-da, bir vaqtning o'zida optimallashtirish fazosining o'lchamini oshiradi, klassik optimallashtirish jarayonini murakkablashtiradi hamda kvant qurilmasida bajariladigan amallar sonining ortishiga olib keladi. Bundan tashqari, ortiqcha yoki fizik jihatdan kam ahamiyatli parametrlarning mavjudligi optimallashtirish jarayonining barqarorligiga salbiy ta'sir ko'rsatishi mumkin. Shu sababli variatsion kvant algoritmlarida barcha parametrlarni bir xil darajada saqlab qolish o'rniga,

kvant holatining axborot tuzilmasiga eng katta hissa qo'shuvchi parametrlarni aniqlash va qolgan parametrlarni qisqartirish muhim ilmiy masala hisoblanadi.

Mazkur muammoni hal qilishda kvant Fisher axboroti (Quantum Fisher Information, QFI) samarali matematik vositalardan biri hisoblanadi. QFI kvant holatining parametrlar o'zgarishiga nisbatan sezgirligini tavsiflaydi va parametrik kvant holatlar fazosining lokal geometrik xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. QFI matritsasining xos qiymatlari parametrlar fazosidagi turli yo'nalishlarning kvant holatga ta'sirini miqdoriy baholash imkonini beradi. Katta xos qiymatga ega yo'nalishlar kvant holatining sezilarli o'zgarishini ifodalasa, juda kichik yoki nolga yaqin xos qiymatlar tegishli parametrik yo'nalishlarning kam informatsion yoki ortiqcha ekanligini ko'rsatadi. Shu nuqtai nazardan, QFI spektridan foydalanish variatsion ansatzdagi parametrlar sonini oldindan belgilangan axborot qamrovi chegarasi asosida avtomatik ravishda aniqlash imkonini beradi. Bunda umumiy QFI qiymatining ma'lum foizini ta'minlaydigan dominant xos yo'nalishlar tanlanadi va ular asosida qisqartirilgan parametrlar fazosi shakllantiriladi. Ushbu yondashuv parametrlar sonini kamaytirish bilan birga, variatsion algoritmnining asosiy energetik xususiyatlarini saqlab qolish imkoniyatini beradi. Mavjud tadqiqotlarda VQE samaradorligini oshirish uchun turli xil ansatz konstruksiyalari, parametrlarni optimallashtirish usullari va adaptiv variatsion yondashuvlar taklif qilingan. Biroq parametrlar sonini kamaytirish masalasida faqat ansatzning algebraik tuzilishiga asoslangan yondashuvlar har doim ham kvant holatining axborot-geometrik xususiyatlarini hisobga olmaydi. Shu sababli parametrlarning haqiqiy informatsion ahamiyatini QFI orqali baholash va uning spektral xususiyatlari asosida optimal parametrlar sonini aniqlash dolzarb masala bo'lib qolmoqda.

Ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi **kvant Fisher axboroti asosida variatsion kvant algoritmlarida optimal parametrlar sonini aniqlash va parametrlar fazosini qisqartirishning VQE hisoblash aniqligiga ta'sirini eksperimental baholashdan iborat**. Tadqiqotda dastlab 24 parametrlilik maksimal variatsion ansatz shakllantirilib, VQE yordamida uning optimal energetik holati aniqlanadi. Keyingi bosqichda optimal kvant holat uchun QFI matritsasi hisoblanadi va uning xos qiymatlari spektral tahlil qilinadi. Umumiy QFI ning kamida 95 foizini qamrab oluvchi dominant xos yo'nalishlar aniqlanib, ular asosida qisqartirilgan variatsion ansatz hosil qilinadi. Tadqiqotning muhim jihati shundaki, parametrlarni qisqartirish faqat nazariy baholash bilan cheklanmaydi. QFI asosida hosil qilingan qisqartirilgan ansatzda VQE jarayoni qayta bajarilib, uning energiyasi maksimal parametrlilik model natijasi bilan bevosita taqqoslanadi. O'tkazilgan tajribada 24 parametrlilik ansatz uchun umumiy QFI ning 95 foizdan ortiq qismini atigi 9 ta dominant xos yo'nalish qamrab olgani aniqlandi. Natijada parametrlar soni 24 tadan 9 tagacha qisqartirilib, 62.5 foizlik qisqarishga erishildi. Shu bilan birga, qisqartirilgan ansatzning VQE energiyasi maksimal ansatz natijasidan atigi 1.51×10^{-8} ga farq qilgan va nisbiy energiya xatoligi 0.00000202% ni tashkil etgan.

Mazkur ishda QFI asosida parametrlarning informatsion ahamiyatini baholash, optimal parametrlar sonini aniqlash va qisqartirilgan ansatzning VQE aniqligini eksperimental tekshirishning yagona yondashuvi taklif etiladi. Olingan natijalar QFI spektridan foydalanish variatsion kvant algoritmlarining parametrik murakkabligini sezilarli darajada kamaytirish va shu bilan birga hisoblash natijasining aniqligini saqlab qolish uchun samarali vosita ekanligini ko'rsatadi. Peruzzo va boshqalar tomonidan variatsion xos qiymatlarni aniqlash algoritmining fotonik kvant protsessorda namoyish etilishi variatsion kvant hisoblashlarning amaliy

imkoniyatlarini ko'rsatib berdi [1]. Keyinchalik VQE, QAOA va variatsion kvant klassifikatorlari kabi algoritmlar keng tadqiq qilindi [2].

Variatsion kvant algoritmlarining muhim muammolaridan biri parametrlar sonini tanlash hisoblanadi. Parametrlar sonining ortishi ansatzning ifodaviy imkoniyatini oshirishi mumkin. Biroq ortiqcha parametrlar optimallashtirish fazosining o'lchamini oshiradi, parametrlarni aniqlashni murakkablashtiradi va kvant sxemasi chuqurligining ortishiga sabab bo'ladi. Bundan tashqari, real kvant qurilmalarida sxema chuqurligining ortishi kvant shovqini va apparat xatoliklarining ta'sirini kuchaytirishi mumkin. Shu sababli kvant algoritmining yetarli aniqligini saqlagan holda nechta parametrdan foydalanish optimal hisoblanishini aniqlash dolzarb hisoblanadi. Mazkur savolga javob berishda kvant axborot geometriyasi muhim imkoniyatlarni taqdim etadi. Xususan, Kvant Fisher axboroti parametrik kvant holatning parametrlar o'zgarishiga sezgirligini miqdoriy tavsiflaydi. Braunstein va Caves kvant statistik masofa bilan kvant Fisher axboroti o'rtasidagi fundamental bog'liqlikni ko'rsatgan [3]. QFI keyinchalik kvant parametrik baholash, kvant metrologiya va variatsion kvant hisoblash masalalarida qo'llanila boshlandi.

2 Materiallar va usullar

2.1. Variatsion kvant ansatz modeli

Tadqiqotda kubitli parametrik kvant tizimi qoraladi. Boshlang'ich kvant holat parametrik unitar operator yordamida o'zgartiriladi [4-7]:

$$|\psi(\theta)\rangle = U(\theta)|\psi_0\rangle.$$

Parametrik operator bir nechta qatlamlardan tashkil topishi mumkin:

$$U(\theta) = U_L(\theta_L)U_2(\theta_2)U_1(\theta_1).$$

Agar har bir qatlamda q ta parametr ishlatilsa, umumiy parametrlar soni: $p = qL$ ko'rinishida aniqlanadi.

Masalan, bir kubitli parametrik aylanish operatori:

$$R_\alpha(\theta) = \exp\left(-\frac{i\theta P_\alpha}{2}\right), \quad \alpha \in \{x, y, z\}$$

ko'rinishida berilishi mumkin. VQE masalasida Hamiltonian Pauli operatorlari bo'yicha quyidagicha yoyiladi: $H = \sum_{k=1}^M c_k P_k$.

Bu yerda c_k — Hamiltonian koeffitsientlari, P_k — Pauli operatorlari kombinatsiyasi, M — Hamiltonian hadlari soni. Shunda maqsad funksiyasi:

$$E(\theta) = \sum_{k=1}^M c_k \langle \psi(\theta) | P_k | \psi(\theta) \rangle$$

orqali aniqlanadi.

Optimal yechim: $E_{\min} = \min_{\theta} E(\theta)$ shartni qanoatlantiruvchi parametrlar vektori orqali topiladi.

2.2. Kvant Fisher axborot matritsasini aniqlash

Parametrik kvant holatining i – parametr bo'yicha hosilasi [8-10]: $|\partial_i \psi\rangle = \frac{\partial}{\partial \theta_i} |\psi(\theta)\rangle$

ko'rinishida aniqlanadi.

Sof kvant holat uchun QFI matritsasining elementlari quyidagicha hisoblanadi:

$$F_{ij} = 4 \operatorname{Re} [\langle \partial_i \psi | \partial_j \psi \rangle - \langle \partial_i \psi | \psi \rangle \langle \psi | \partial_j \psi \rangle].$$

Ushbu matritsa p ta parametr uchun:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & L & F_{1p} \\ F_{21} & F_{22} & L & F_{2p} \\ M & M & O & M \\ F_{p1} & F_{p2} & L & F_{pp} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishida shakllantiriladi.

QFI matritsasining diagonal elementlari alohida parametrlarning kvant holatga sezgirligini ifodalaydi: $F_{ii} = 4 [\langle \partial_i \psi | \partial_i \psi \rangle - |\langle \psi | \partial_i \psi \rangle|^2]$.

Har bir parametrning nisbiy QFI hissasi quyidagicha aniqlanadi: $\rho_i = \frac{F_{ii}}{\sum_{j=1}^p F_{jj}}$.

Bu ko‘rsatkich parametrlarning umumiy diagonal QFIga qo‘shadigan hissasini baholash imkonini beradi.

2.3. QFI matritsasining spektral tahlili

Parametrlarning o‘zaro bog‘liqligini hisobga olish uchun QFI matritsasining spektral xususiyatlari o‘rganiladi. QFI matritsasining xos qiymatlari: $Fv_k = \lambda_k v_k$ tenglama orqali aniqlanadi.

Xos qiymatlar kamayish tartibida joylashtiriladi: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq L \geq \lambda_p \geq 0$.

QFI matritsasining umumiy axborot miqdori uning izi orqali aniqlanadi:

$$F_{\text{tot}} = \operatorname{Tr}(F) = \sum_{k=1}^p \lambda_k.$$

Dastlabki m ta asosiy xos qiymat tomonidan qamrab olingan axborot ulushi:

$$C(m) = \frac{\sum_{k=1}^m \lambda_k}{\sum_{k=1}^p \lambda_k}.$$

Ushbu ko‘rsatkich m ta asosiy parametrik yo‘nalish umumiy QFI axborotining qanday qismini qamrab olishini ko‘rsatadi. Agar $C(m)$ qiymati belgilangan τ chegaradan yuqori bo‘lsa: $C(m) \geq \tau$, u holda m ta parametrik yo‘nalish kvant holatni yetarli axborot bilan ifodalashi mumkin deb qaraladi.

2.4. Optimal parametrlar sonini aniqlash

Optimal parametrlar sonini aniqlash uchun QFI axborotining o‘shish tezligi ham hisobga olinadi. Yangi parametr yoki parametrik yo‘nalish qo‘shilgandagi marginal axborot: $\Delta C(m) = C(m) - C(m-1)$ orqali aniqlanadi.

Agar: $\Delta C(m) < \varepsilon$ bo‘lsa, m -parametrni qo‘shish umumiy axborot miqdorini sezilarli oshirmaydi.

Shunday qilib, optimal parametrlar soni quyidagi mezon orqali aniqlanadi:

$$m^* = \min\{m : C(m) \geq \tau \wedge \Delta C(m+1) < \varepsilon\}.$$

Bu yerda:

m^* — optimal parametrlar soni;

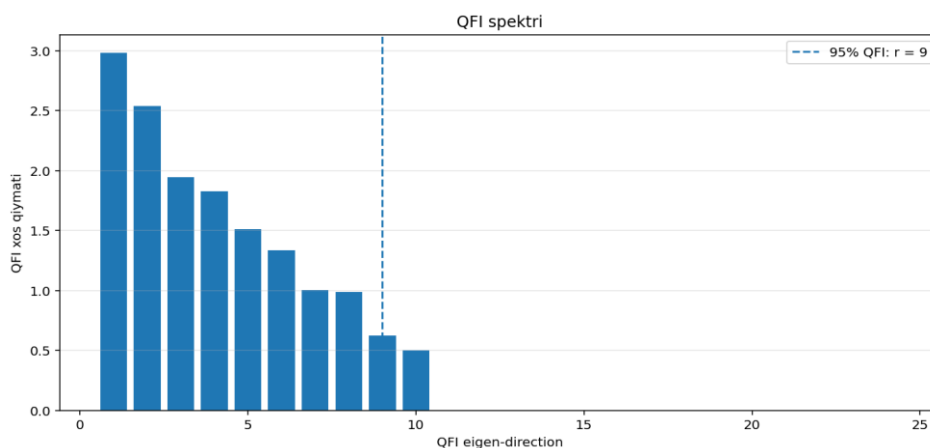
τ — talab qilinadigan minimal axborot qamrovi;

ε — marginal axborotning minimal chegarasi.

Masalan, yuqori aniqlik talab qilinadigan masalada: $\tau = 0.95$ qiymatni tanlash mumkin. Bunda tanlangan parametrlar umumiy QFI axborotining kamida 95 foizini qamrab olishi kerak.

3 Natijalar

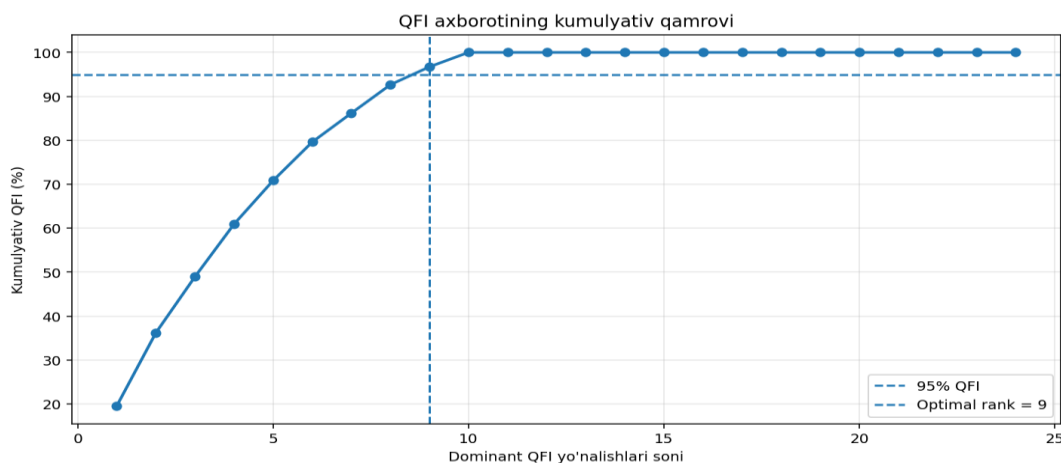
Taklif etilgan metodda parametrlar soni ketma-ket ravishda oshiriladi. Har bir parametrlar soni uchun parametrik kvant holat shakllantirilib, QFI matritsasi hisoblanadi. 1-rasmda 24 parametrlilik maksimal ansatz uchun QFI matritsasining xos qiymatlari kamayish tartibida tasvirlanadi. Natijalarga ko'ra, birinchi 10 ta xos qiymat asosiy axborot hissasini beradi, 11-parametrdan boshlab esa xos qiymatlar keskin ravishda juda kichik qiymatlarga tushadi.



Rasm 1. QFI xos qiymatlari spektri.

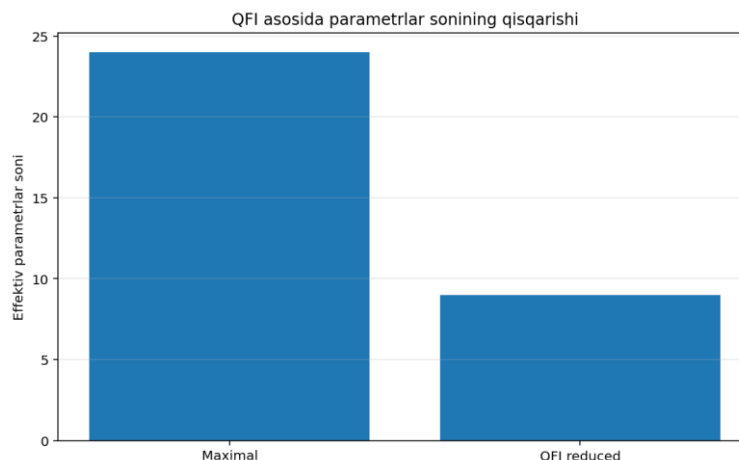
Ushbu grafikda QFI xos qiymatlarining dastlabki 9 ta yo'nalishda yuqori, keyingi yo'nalishlarda esa keskin kamayishi kuzatiladi. Dastlabki 9 ta yo'nalish umumiy QFI ning **96.73 %** ini tashkil etadi. Bu 24 parametrdan faqat 9 tasi asosiy axborotni tashishini ko'rsatadi.

2- rasmda kumulativ QFI grafigida 8 ta parametrdan axborot qamrovi **92.65 %**, 9 ta parametrdan esa **96.73 %** ga yetishi ko'rsatilgan. Shu sababli 95 % chegarani qanoatlantiruvchi optimal parametrlar soni **9 ta** deb belgilangan.



Rasm 2. Kumulativ QFI

3-rasmdagi grafikda parametrlar sonining **24 tadan 9 tagacha** kamaygani ko'rsatiladi. Natijada ansatz parametrlari **62.5 % ga qisqartirilgan**, bu esa variatsion optimallashtirish murakkabligini kamaytirish imkonini beradi.



Rasm 3. Parametrlar sonining qisqarishi

Grafiklar QFI asosida **24 parametrlari ansatzni 9 parametrgacha qisqartirish mumkinligini**, bunda umumiy QFI ning **96.73 %** saqlanishini va VQE energiyasi deyarli o'zgarmasligini ko'rsatadi.

4 Xulosa

Ushbu tadqiqotda variatsion kvant algoritmlarining optimal parametrlar sonini aniqlash uchun Kvant Fisher axborotiga asoslangan metod taklif etildi. Tadqiqotda parametrik kvant holat uchun QFI matritsasi shakllantirilib, uning xos qiymatlari yordamida kvant axborotining parametrik yo'nalishlar bo'yicha taqsimlanishi baholandi. Optimal parametrlar sonini aniqlash uchun QFI axborotining kumulyativ ulushi va marginal axborot hissi birgalikda ishlatildi. Mazkur mezon kvant holatini yetarli darajada ifodalash uchun zarur bo'lgan parametrlar sonini minimal darajada saqlashga imkon beradi. Bundan tashqari, QFI axboroti, maqsad funksiyasi va parametrlar soni bilan bog'liq murakkablikni birlashtiruvchi kompleks optimallashtirish mezonini ishlab chiqildi. Variatsion kvant algoritmlarida parametrlar sonini tanlash masalasi nafaqat algoritmnining aniqligi, balki kvant axboroti va hisoblash murakkabligi nuqtai nazaridan ham baholanishi mumkin. Taklif etilgan usulning ilmiy yangiligi parametrlar sonini QFI matritsasining spektral xususiyatlari asosida aniqlash, yetarli axborot qamrovini belgilash va marginal axborot hissi kamayganda parametrlar sonining ortishini to'xtatishdan iborat. Ushbu tadqiqotda variatsion kvant algoritmlarining parametrlar sonini kvant Fisher axboroti asosida optimallashtirish usuli ishlab chiqildi va uch kubitli Hamiltonian misolida eksperimental hisoblash orqali tekshirildi. Tajriba QFI asosida ansatz parametrlarini 24 tadan 9 tagacha qisqartirish mumkinligini, bunda umumiy QFI ning 96.725526 % qismi saqlanib qolishini va VQE energiyasi amaliy jihatdan o'zgarmasligini ko'rsatdi. Ushbu natija QFI spektral tahlilini variatsion kvant algoritmlarida parametrlar sonini aniqlash va ansatz murakkabligini kamaytirish uchun samarali usul sifatida qo'llash mumkinligini tasdiqlaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] *Peruzzo A., McClean J., Shadbolt P., Yung M.-H., Zhou X.-Q., Love P. J., Aspuru-Guzik A., O'Brien J. L.* A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor. *Nature Communications*. 2014;5:4213. DOI: 10.1038/ncomms5213.
- [2] *Cerezo M., Arrasmith A., Babbush R., Benjamin S. C., Endo S., Fujii K., McClean J. R., Mitarai K., Yuan X., Cincio L., Coles P. J.* Variational quantum algorithms. *Nature Reviews Physics*. 2021;3:625–644. DOI: 10.1038/s42254-021-00348-9.
- [3] *Braunstein S. L., Caves C. M.* Statistical distance and the geometry of quantum states. *Physical Review Letters*. 1994;72(22):3439–3443. DOI: 10.1103/PhysRevLett.72.3439.
- [4] *Stokes J., Izaac J., Killoran N., Carleo G.* Quantum Natural Gradient. *Quantum*. 2020;4:269. DOI: 10.22331/q-2020-05-25-269.
- [5] *McClean J. R., Boixo S., Smelyanskiy V. N., Babbush R., Neven H.* Barren plateaus in quantum neural network training landscapes. *Nature Communications*. 2018;9:4812. DOI: 10.1038/s41467-018-07090-4.
- [6] *Paris M. G. A.* Quantum estimation for quantum technology. *International Journal of Quantum Information*. 2009;7(Supplement 1):125–137.
- [7] *Benedetti M., Lloyd E., Sack S., Fiorentini M.* Parameterized quantum circuits as machine learning models. *Quantum Science and Technology*. 2019;4(4):043001.
- [8] *Schuld M., Sweke R., Meyer J. J.* Effect of data encoding on the expressive power of variational quantum-machine-learning models. *Physical Review A*. 2021;103:032430.
- [9] *Ostaszewski M., Grant E., Benedetti M.* Structure optimization for parameterized quantum circuits. *Quantum*. 2021;5:391.
- [10] *Nielsen M. A., Chuang I. L.* *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press; 2010.